На правах рукописи

Заяц Алексей Евгеньевич

Неминимальное взаимодействие гравитационного и калибровочных полей

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2008

Работа выполнена на кафедре теории относительности и гравитации Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Казанский государственный университет имени В. И. Ульянова-Ленина».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Балакин Александр Борисович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Бронников Кирилл Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент
Попов Аркадий Александрович

Ведущая организация:
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Защита состоится 6 марта 2008 г. в 14 час. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.081.15 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская 16а, ауд. 110.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 22 января 2008 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета,
профессор М. В. Ерёмин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Неминимальная теория поля (скалярного, векторного и тензорного) приобрела в последние два десятилетия особую актуальность, и в подтверждение тому можно привести четыре аргумента. Во-первых, крупнейшее открытие последних лет в области космологии — ускоренное расширение Вселенной — потребовало введения новой экзотической субстанции, так называемой «тёмной энергии»; неминимальная теория поля, основанная на введении взаимодействия известных физических полей с кривизной, является альтернативным подходом и также способна объяснить данный космологический феномен. Во-вторых, при исследовании объектов с нетривиальной топологией, таких как кротовые норы, возникает необходимость введения субстанций с экзотическим уравнением состояния, например, фантомного поля; и в этом случае неминимальная теория поля способна представить достойную альтернативу. В-третьих, появились явные примеры того, что проблема сингулярностей, возникающих в теориях гравитации, может быть решена в рамках неминимальной теории поля. Наконец, по справедливому замечанию Р. Фейнмана, нелокальное расширение теории поля неминуемо приводит к учёту взаимодействия физических полей с кривизной, что является краеугольным камнем неминимальной теории поля.

В настоящий момент неминимальная теория поля представлена хорошо разработанными абелевыми моделями взаимодействия скалярного и электромагнитного полей с кривизной пространства-времени. Актуальной проблемой становится расширение идей и методов абелевой неминимальной теории поля на случай неабелевых взаимодействий. Настоящая работа посвящена изучению неминимальной теории Эйнштейна–Янга–Миллса как одного из фрагментов общей неминимальной неабелевой теории поля.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является построение неминимальной трёхпараметрической модели Эйнштейна–Янга–Миллса, изучение её общих свойств и поиск точных решений уравнений гравитационного и калибровочного полей.

В диссертационной работе решаются следующие задачи:

1. Вывод модифицированной самосогласованной системы уравнений гравитационного и калибровочного полей с учётом неминимального взаимодействия.

2. Исследование структуры и свойств эффективного тензора энергии-импульса калибровочного поля в трёхпараметрической неминимальной модели.

3. Получение и исследование точных статических сферически симметричных решений, описывающих гравитационное и калибровочное поля точечных магнитных монополей, электрических зарядов и дионов.

4. Построение и изучение свойств точных решений, описывающих кротовые норы, поддерживаемые сферически симметричным магнитным полем, неминимально взаимодействующим с кривизной.

5. Исследование точных космологических решений в неабелевых неминимальных моделях с отличной от нуля космологической постоянной.

6. Приложение неминимальной теории к исследованию траекторий безмассовых пробных частиц в окрестности гравитирующего центра, при наличии неминимального взаимодействия между гравитационным полем и калибровочным полем, описывающим данную частицу.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Найдено новое точное решение самосогласованной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса, являющееся неминимальным трёхпараметрическим обобщением решения для монополя Ву–Янга. Предъявлено однопараметрическое семейство решений, для которого метрика гравитационного поля, создаваемого магнитным монополем, не имеет сингулярностей.

2. Получены новые точные решения для неминимального монополя Ву–Янга в модели Драммонда–Хатрелла, характеризующиеся регулярной метрикой и одним, двумя или тремя горизонтами в зависимости от величины параметра неминимального взаимодействия.

3. Впервые для неминимальной модели Эйнштейна–Янга–Миллса получено точное решение, описывающее проходимую кротовую нору, поддерживаемую сферически симметричным калибровочным полем магнитного типа.

4. Впервые получены космологические решения в неминимальной самосогласованной модели Эйнштейна–Янга–Миллса с неабелевым калибровочным полем. Для указанных решений метрика пространства-времени совпадает с метрикой де Ситтера, тензор индукции калибровочного поля тождественно равен нулю при отличной от нуля напряжённости поля.

5. Динамика безмассовых частиц в окрестности неминимального монополя Ву–Янга с регулярной метрикой исследована с двух позиций: аналитически построены эффективные (цветные, оптические) метрики и численно смоделированы траектории частиц для различных значений прицельного параметра. Благодаря этому установлено, что сингулярности в эффективных метриках имеют

динамический характер и связаны с точками возврата и самопересечения траекторий.

Достоверность результатов диссертации

Достоверность результатов обеспечивается тем, что в диссертации рассматриваются точные решения полной самосогласованной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса. Найденные решения проверены с помощью программы аналитических расчётов Maple 9.5. Достоверность выводов и научных положений диссертации подтверждается согласием полученных результатов с известными результатами в предельных случаях.

Научные положения, выносимые на защиту

1. Полученное в работе трёхпараметрическое семейство точных решений самосогласованной системы неминимально модифицированных уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса, определяемое параметрами неминимального взаимодействия q_1, q_2, q_3 и представляющее собой неминимальное обобщение сферически симметричного решения, известного как монополь Ву–Янга, содержит однопараметрическое подсемейство решений с регулярной метрикой, не содержащей горизонтов.

2. Среди точных решений в неминимальной модели Эйнштейна–Янга–Миллса с одним, двумя, тремя и более горизонтами существуют классы регулярных решений (например, в обобщённой модели Драммонда–Хатрелла) и решения, имеющие сингулярности различных типов (модели с $q_1 = 0$, $q_3 = -4q_2$ с магнитным зарядом, модели с $q_1 + q_2 = 0$, $q_3 = 0$ и $3q_1 + q_2 = 0$, $q_3 = 0$ с электрическим зарядом, модель с $q_2 = q_3 = 0$ для диона).

3. Сферически симметричное калибровочное поле магнитного типа при специальном выборе параметров неминимального взаимодействия q_1, q_2, q_3 обеспечивает существование проходимых кротовых

нор. Данные кротовые норы обладают положительной асимптотической массой, которая зависит от радиуса горловины кротовой норы и ограничена снизу значением, соизмеримым с планковской массой.

4. Неминимально самодуальное неабелевое калибровочное поле с нулевой индукцией и отличной от нуля напряжённостью обеспечивает формирование регулярной изотропной космологической модели Вселенной деситтеровского типа.

5. Неминимальное взаимодействие собственного калибровочного поля пробных безмассовых частиц с гравитационным полем неминимального монополя Ву–Янга вызывает эффект, аналогичный двойному лучепреломлению в оптике, и приводит к появлению точек возврата и самопересечения в траекториях частиц. Неминимальный монополь Ву–Янга играет роль рассеивающего центра для потока безмассовых частиц с различными значениями прицельного параметра.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Международной конференции по гравитации, космологии, астрофизике, посвященной 90-летию со дня рождения проф. К. П. Станюковича (Москва, 2006), XIII Международной конференции «Физические интерпретации теории относительности» (Москва, 2007); семинарах отдела теоретической физики Констанцкого университета (Констанц, Германия, 2006), кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета, кафедры геометрии ТГГПУ, итоговых научных конференциях КГУ (2006, 2007 гг.).

Публикации

Основное содержание диссертации отражено в десяти публикациях, среди которых три статьи опубликованы в зарубежных журналах

(Physics Letters B, Physical Review D), одна статья в российском журнале «Гравитация и космология» (Gravitation and Cosmology), три статьи в трудах конференции и две — в архиве электронных препринтов библиотеки Корнеллского университета и одном тезисе доклада.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 122 страницы. Список литературы содержит 160 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена построению трёхпараметрической неминимальной модели Эйнштейна–Янга–Миллса. В § 1.1 изложен обзор современного состояния теории неминимального взаимодействия гравитации со скалярным, электромагнитным и неабелевым калибровочным полями. Параграф 1.2 содержит описание общего формализма калибровочных полей и минимальной модели Эйнштейна–Янга–Миллса. Параграф 1.3 посвящён построению неминимальной модели с лагранжианом взаимодействия, линейным по компонентам тензора кривизны и квадратичным по компонентам тензора напряжённости калибровочного поля

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}^{ikmn} F^{(a)}_{ik} F_{mn(a)}\,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{ikmn} = \frac{q_1}{2}\,R\left(g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km}\right) + \\ + \frac{q_2}{2}\left(R^{im}g^{kn} - R^{in}g^{km} + R^{kn}g^{im} - R^{km}g^{in}\right) + q_3 R^{ikmn},\end{aligned} \tag{2}$$

получению полевых уравнений с помощью вариационного принципа, изучению свойств тензора энергии-импульса калибровочного поля в рассматриваемой модели.

В **главе 2** рассмотрены примеры статических сферически симметричных решений в неминимальной теории. В § 2.2 получено точное решение самосогласованной системы уравнений Янга–Миллса, представляющее собой неминимальное обобщение монополя Ву–Янга. Из трёхпараметрического семейства найденных решений выделено и детально изучено несколько однопараметрических подмоделей:

- Сингулярная модель ($q_1 = 0$, $q_3 = -4q_2$) представляющая собой простейшее неминимальное обобщение метрики Рейсснера–Нордстрёма

$$ds^2 = N(r)dt^2 - \frac{dr^2}{N(r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) ,$$
$$N(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa}{2r^2} + \frac{\kappa q_2}{r^4} . \tag{3}$$

  Функция $N(r)$ обращается в бесконечность в начале координат, как и в модели Рейсснера–Нордстрёма, но в отличие от последней, метрика (3) может содержать до трёх горизонтов, в зависимости от соотношений между параметрами.

- Модель Драммонда–Хатрелла ($q_1 = -5q < 0$, $q_2 = 13q$, $q_3 = -2q$). В этой модели метрическая функция $N(r)$

$$N(r) = \left(1 + \frac{5\kappa q}{r^4}\right)^{-1}\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa}{2r^2} - \frac{2\kappa q}{r^4}\right] . \tag{4}$$

  всюду конечна и в начале координат принимает отрицательное значение $N(0) = -2/5$. Метрика пространства-времени имеет один, два или три горизонта, а сингулярность в начале координат является слабой, или конической.

- Регулярная однопараметрическая модель ($q_1 = -q < 0$, $q_2 = 4q$, $q_3 = -6q$)

$$N(r) = 1 + \frac{r^2\left(\kappa - 4Mr\right)}{2\left(r^4 + \kappa q\right)} . \tag{5}$$

  Функция $N(r)$ всюду является конечной и в начале координат принимает значение $N(0) = 1$. Инварианты кривизны R, $R_{ik}R^{ik}$,

$R_{ikmn}R^{ikmn}$ конечны при любом r. Когда масса монополя M меньше некоторого критического значения, метрика в данной модели не имеет горизонтов. В противном случае, она содержит один или два горизонта.

В § 2.3 рассмотрена задача о нахождении калибровочного и гравитационного полей, создаваемых точечным зарядом электрического типа. В случае, если параметры неминимального взаимодействия связаны соотношениями $q_1 + q_2 = 0$, $q_3 = 0$ или $3q_1 + q_2 = 0$, $q_3 = 0$, предъявлены точные решения. В § 2.4 обсуждается случай точечного диона, то есть частицы, несущей заряды магнитного и электрического типов. Если магнитный и электрический заряды равны и $q_2 = q_3 = 0$, решение получено в явном виде. В остальных случаях решения предъявлены в виде разложений по степеням $1/r$.

Глава 3 посвящена изучению кротовых нор в неминимальной модели Эйнштейна–Янга–Миллса. В § 3.3 показано, что в модели с магнитным монополем Ву–Янга и константами неминимального взаимодействия

$$q_1 = \frac{a^4}{\kappa}\,, \quad q_2 = -\frac{10a^4}{3\kappa} - \frac{a^2}{6}\,, \quad q_3 = \frac{4a^4}{3\kappa} + \frac{2a^2}{3} \tag{6}$$

существует решение, описывающее кротовую нору с радиусом горловины, равным параметру a. Такие решения были получены в явном виде. В результате анализа предъявленных решений показано, что при сравнительно больших значениях радиуса горловины ($a > 0.5\sqrt{\kappa}$) кротовая нора является проходимой, в остальных случаях — непроходимой, так как тогда горловина будет окружена горизонтами. Асимптотическая масса полученной кротовой норы достигает своего минимального значения при $a = 0.545\sqrt{\kappa}$.

В **главе 4** рассматриваются изотропные космологические неминимальные модели с неабелевыми калибровочными полями. В § 4.1 введено понятие неминимальной самодуальности для калибровочных полей:

$$\lambda \overset{*}{F}{}^{(a)}_{ik} = F^{(a)}_{ik} + \mathcal{R}_{ikmn}F^{mn(a)}\,. \tag{7}$$

Получены точные решения самосогласованной системы неминимальных уравнений Эйнштейна и Янга-Миллса с нулевой индукцией калибровочного поля, для которых напряжённость поля Янга–Миллса отлична от нуля. В § 4.2 показано, что условие (7) является справедливым для любого поля $F^{(a)}_{ik}$, если $\lambda = 0$ и тензор неминимальной восприимчивости $\mathcal{R}_{ikmn}$ (2) имеет вид

$$\mathcal{R}_{ikmn} = \frac{1}{2}(g_{im}g_{kn} - g_{in}g_{km})\,. \tag{8}$$

Если условие (8) выполняется, то неминимально модифицированное уравнение Янга–Миллса обращается в тождество. В § 4.3 приведены примеры точных решений уравнений Эйнштейна для случаев $q_1 = q_2 = 0$ и $q_2 = q_3 = 0$.

Глава 5 посвящена исследованию уравнения эйконала в рамках модели с регулярной фоновой метрикой (5) при $M = 0$, описывающей неминимальный магнитный монополь Ву–Янга без горизонтов. В § 5.3 построены оптические и цветные метрики, демонстрирующие наличие эффекта двойного лучепреломления, индуцированного неминимальным взаимодействием гравитационного поля монополя и собственного калибровочного поля пробной частицы. Параграф 5.4 посвящён численному моделированию траекторий безмассовых частиц.

В заключении перечислены основные результаты диссертации.

Основные результаты

1. Построена трёхпараметрическая самосогласованная неминимальная модель Эйнштейна–Янга–Миллса с лагранжианом взаимодействия, линейным по компонентам тензора кривизны и квадратичным по компонентам тензора напряжённости калибровочного поля, проанализированы структура и свойства модифицированных уравнений гравитационного и калибровочного полей.

2. Получено трёхпараметрическое семейство точных решений самосогласованной системы неминимально модифицированных уравнений Эйнштейна и уравнений Янга–Миллса, которое определяется параметрами неминимального взаимодействия q_1, q_2, q_3 и

представляет собой неминимальное обобщение сферически симметричного решения, известного как монополь Ву–Янга.

3. Детально изучены примеры одно- и двухпараметрических семейств точных решений, описывающих неминимальный монополь Ву–Янга, для которых решения представлены в явном аналитическом виде. В частности, показано, что в модели с $q_1 = -q$, $q_2 = 4q$, $q_3 = -6q$ метрика пространства-времени всюду регулярна, а если масса монополя меньше критического значения, то горизонты отсутствуют; для модели $q_1 = -5q$, $q_2 = 13q$, $q_3 = -2q$ (обобщение модели Драммонда–Хатрелла) метрика регулярна, но имеет один, два или три горизонта в зависимости от величины параметра q; в моделях с $q_1 = 0$, $q_3 = -4q_2$ и $6q_1 + 4q_2 + q_3 = 0$ метрика сингулярна.

4. Получены два однопараметрических семейства точных решений в модели, описывающей точечный калибровочный заряд электрического типа (модели с $q_1 + q_2 = 0$, $q_3 = 0$ и $3q_1 + q_2 = 0$, $q_3 = 0$), а также точечный дион с равными по абсолютной величине электрическим и магнитным зарядами (модель с $q_2 = q_3 = 0$).

5. Получено однопараметрическое семейство точных решений, описывающих проходимые кротовые норы, поддерживаемые сферически симметричным магнитным полем, которое неминимально взаимодействует с кривизной. Показано, что данные кротовые норы обладают положительной асимптотической массой, которая зависит от радиуса горловины кротовой норы и ограничена снизу значением, соизмеримым с планковской массой.

6. Получены точные решения самосогласованной системы неминимальных уравнений Эйнштейна и Янга-Миллса для двух изотропных космологических моделей деситтеровского типа с нулевой индукцией калибровочного поля (модели с $q_1 = q_2 = 0$ и $q_2 = q_3 = 0$), для которых напряженность поля Янга–Миллса отлична от нуля.

7. В рамках модели с регулярной фоновой метрикой, описывающей неминимальный магнитный монополь Ву–Янга без горизонтов, исследовано уравнение эйконала. Построены оптические и цветные метрики, демонстрирующие наличие эффекта двойного лучепреломления, индуцированного неминимальным взаимодействием гравитационного поля монополя и собственного калибровочного поля пробной частицы. Компьютерное моделирование траекторий пробных безмассовых частиц вблизи неминимального монополя показало, что монополь играет роль рассеивающего центра, а траектории содержат точки возврата и самопересечения.

Публикации по теме диссертации

1. Balakin A. B., *Curvature coupling in Einstein–Yang–Mills theory and non-minimal self-duality* / A. B. Balakin, A. E. Zayats // Gravitation and Cosmology. — 2006. — Vol. 12. — P. 302 – 306.

2. Balakin A. B., *Non-minimal Wu–Yang monopole* / A. B. Balakin, A. E. Zayats // Physics Letters B. — 2007. — Vol. 644. — P. 294 – 298.

3. Balakin A. B., *Nonminimal Wu–Yang wormhole* / A. B. Balakin, S. V. Sushkov, A. E. Zayats // Physical Review D. — 2007. — Vol. 75. — 084042. — 7 p.

4. Balakin A. B., *Nonminimal Einstein–Yang–Mills–Higgs theory: Associated, color and color-acoustic metrics for the Wu–Yang monopole model* / A. B. Balakin, H. Dehnen, A. E. Zayats // Physical Review D. — 2007. — Vol. 76. — 124011. — 11 p.

5. Заяц А. Е., *Самодуальное решение уравнений Янга–Миллса с калибровочной группой осциллятора* / А. Е. Заяц // Новейшие проблемы теории поля, т. 4 / под ред. А. В. Аминовой. — Казань : Хэтер, 2004. — С. 108 – 111.

6. Заяц А. Е., *О сферически симметричном решении уравнений Янга–Миллса с калибровочной группой осциллятора* / А. Е. Заяц // Новейшие проблемы теории поля, т. 4 / под ред. А. В. Аминовой. — Казань : Хэтер, 2004. — С. 112 – 114.

7. Заяц А. Е., *Отсутствие гравитационного «эффекта Чеширского кота» в неминимальной теории Эйнштейна–Максвелла* / А. Е. Заяц // Новейшие проблемы теории поля, т. 6 / под ред. А. В. Аминовой. — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2007. — С. 238 – 243.

8. Balakin A. B., *Nonminimal isotropic cosmological model with Yang–Mills and Higgs fields* / A. B. Balakin, H. Dehnen, A. E. Zayats // arxiv: 0710.4992 [gr-qc]. — 15 p.

9. Balakin A. B., *Ray optics in the field of non-minimal Dirac monopole* / A. B. Balakin, A. E. Zayats // arxiv: 0710.5407 [gr-qc]. — 10 p.

10. Балакин А. Б., *Неминимальный монополь Ву–Янга* / А. Б. Балакин, А. Е. Заяц // Международная конференция по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодинамике (посв. 90-летию проф. К. П. Станюковича) : Сб. тезисов. — Москва, 2006. — С. 24.